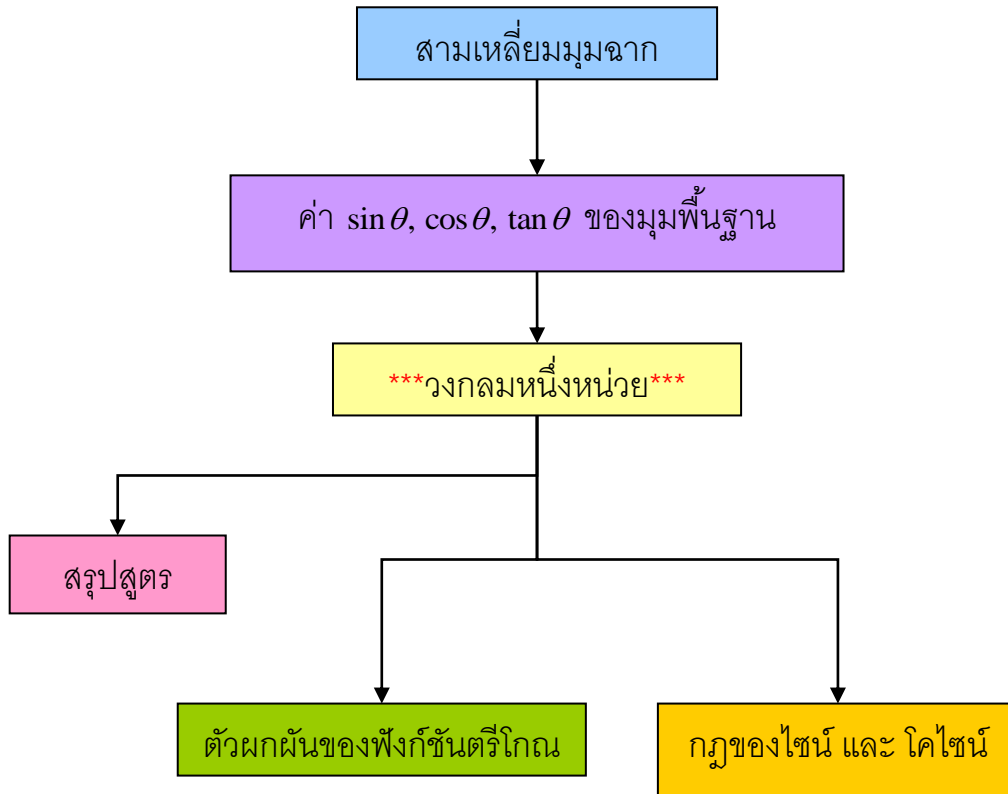
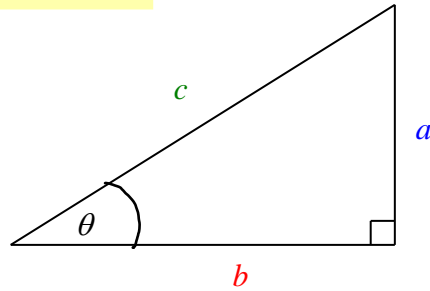


ตรีโกณมิติ ม.5 เทอมต้น สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม



สามเหลี่ยมมุมฉาก



$$\sin \theta = \frac{a}{c} \text{ (ข้าม/ฉาก)}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{c}{a}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{c} \text{ (ชิด/ฉาก)}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{c}{b}$$

$$\tan \theta = \frac{a}{b} \text{ (ข้าม/ชิด)} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{b}{a} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

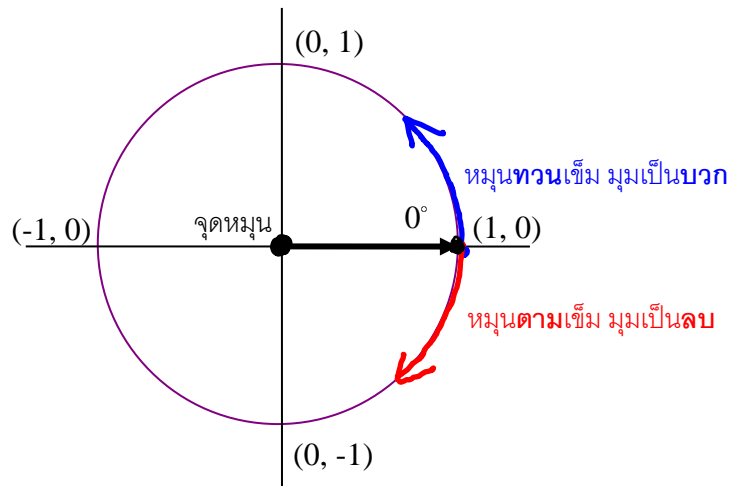
ค่า $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ ของมุมพื้นฐาน

	$\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

วงกลมหนึ่งหน่วย

คือ วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ และมีรัศมียาว 1 หน่วย

องศา กับ เรเดียน



หนึ่งรอบของวงกลม คือ 2π เรเดียน $= 360^\circ$

$$\pi \text{ เรเดียน} = 180^\circ$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ เรเดียน} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ เรเดียน} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

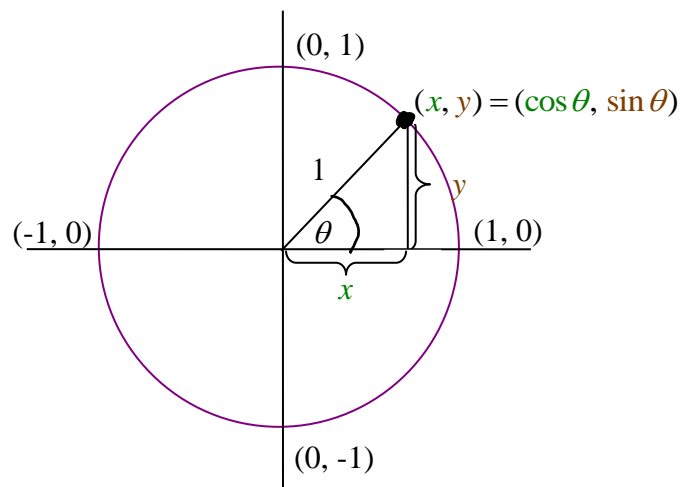
$$\frac{\pi}{4} \text{ เรเดียน} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$$

$$\frac{\pi}{6} \text{ เรเดียน} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$$

$1^\circ = 60'$ (ลิปดา) และ $1' = 60''$ (ฟิลิปดา)

Note มุมเรเดียน จะเขียนหน่วยเรเดียน หรือไม่เขียนก็ได้

เช่น $\frac{\pi}{6}$ เรเดียน จะเขียน $\frac{\pi}{6}$ เฉยๆก็ได้

ค่า $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ 

(x, y) เป็นจุดบนกราฟของวงกลม 1 หน่วย

$$\text{และจาก } \sin \theta = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{x}{1} = x$$

จะได้ว่า $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$

สรุป*****

$\cos \theta$ คือค่าของ x

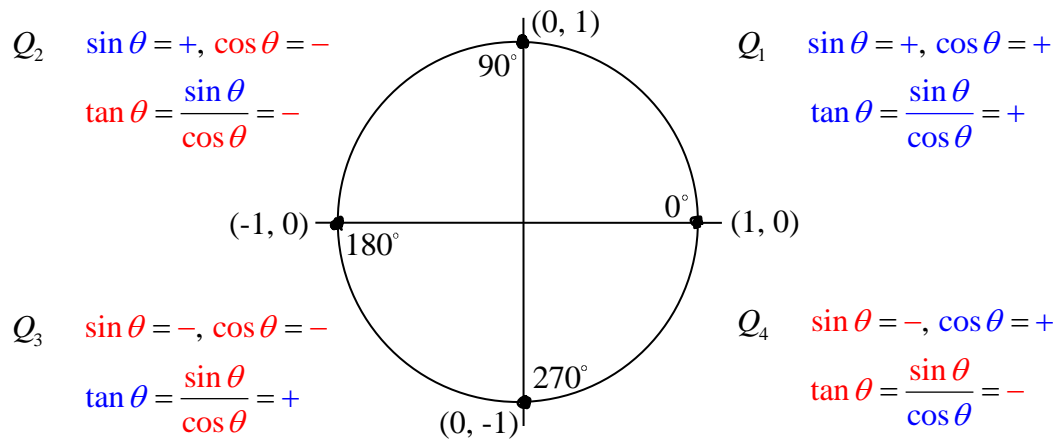
และ $\sin \theta$ คือค่าของ y

จากกราฟวงกลม 1 หน่วย

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{ดังนั้น} \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

$$-1 \leq y \leq 1 \quad \text{ดังนั้น} \quad -1 \leq \sin \theta \leq 1$$

ค่า $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ ที่ตำแหน่งต่างๆ ของวงกลม



ที่ $\theta = 0^\circ = 0$	$\sin \theta = 0$, $\cos \theta = 1$, $\tan \theta = \frac{0}{1} = 0$
ที่ $\theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$	$\sin \theta = 1$, $\cos \theta = 0$, $\tan \theta = \frac{1}{0} = \text{หาค่าไม่ได้}$
ที่ $\theta = 180^\circ = \pi$	$\sin \theta = 0$, $\cos \theta = -1$, $\tan \theta = \frac{0}{-1} = 0$
ที่ $\theta = 270^\circ = \frac{3\pi}{2}$	$\sin \theta = -1$, $\cos \theta = 0$, $\tan \theta = \frac{-1}{0} = \text{หาค่าไม่ได้}$

การหาค่า $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$, $\operatorname{cosec} \theta$, $\sec \theta$, $\cot \theta$ ของมุม θ ต่างๆ

วิธีการ*****

1) หาดำแหน่งของมุม θ ว่าอยู่จุดไหนของวงกลม

$$2) \sin \theta = (+ \text{ หรือ } -) \sin (\quad)$$

ดูว่าตำแหน่งของมุม θ ให้
ค่า $\sin \theta$ เป็นค่า + หรือ ค่า -
ถ้าเป็น + ใส่ +
ถ้าเป็น - ใส่ -

ขนาดของมุมเท่ากับ
ขนาดของมุมแหลม
ที่ตำแหน่งของมุม θ
ทำกับแกน x

$$\cos \theta = (+ \text{ หรือ } -) \cos (\quad)$$

ดูว่าตำแหน่งของมุม θ ให้
ค่า $\cos \theta$ เป็นค่า + หรือ ค่า -
ถ้าเป็น + ใส่ +
ถ้าเป็น - ใส่ -

ขนาดของมุมเท่ากับ
ขนาดของมุมแหลม
ที่ตำแหน่งของมุม θ
ทำกับแกน x

$$\tan \theta = (+ \text{ หรือ } -) \tan (\quad)$$

ดูว่าตำแหน่งของมุม θ ให้
ค่า $\tan \theta$ เป็นค่า + หรือ ค่า -
ถ้าเป็น + ใส่ +
ถ้าเป็น - ใส่ -

ขนาดของมุมเท่ากับ
ขนาดของมุมแหลม
ที่ตำแหน่งของมุม θ
ทำกับแกน x

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

สรุปสูตร

สูตรที่ต้องเข้าใจ (เข้าใจวงกลมหนึ่งหน่วยแล้วไม่ต้องจำ!!!)

- 1) $\sin(-\theta) = -\sin \theta$
- 2) $\cos(-\theta) = \cos \theta$
- 3) $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$
- 4) $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$
- 5) $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$
- 6) $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$
- 7) $\sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta$
- 8) $\cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$
- 9) $\sin(2\pi + \theta) = \sin \theta$ หรือ $\sin(2\pi n + \theta) = \sin \theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม
- 10) $\cos(2\pi + \theta) = \cos \theta$ หรือ $\cos(2\pi n + \theta) = \cos \theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

สูตรที่ต้องจำ

- 1) $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$, $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ (ถ้า $\sin A = \cos B$ จะได้ว่า $A + B = \frac{\pi}{2}$)
- 2) $\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$, $\cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta$ (ถ้า $\tan A = \cot B$ จะได้ว่า $A + B = \frac{\pi}{2}$)

- 3) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- 4) $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$
- 5) $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

- 6) $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
- 7) $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$
 $= 2 \cos^2 \theta - 1$
 $= 1 - 2 \sin^2 \theta$
- 8) $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

จำเป็นชุดๆ แล้ว
จะจำง่ายขึ้นครับ

$$\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$



สูตรแถม

9) $\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$

10) $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$

11) $\tan 3\theta = \frac{3\tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3\tan^2 \theta}$

12) $\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$

13) $\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$

14) $\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$

15) $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

17) $\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$

16) $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

18) $\cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$

19) $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
 20) $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
 21) $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
 22) $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

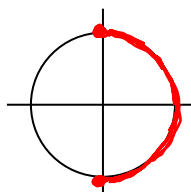
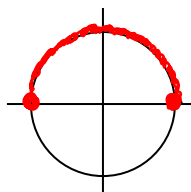
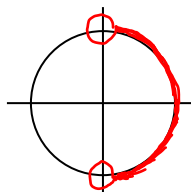
♡ เวลาอยู่ในห้องสอบ
 สูตร 19-30
 ให้เขียนขึ้นมาก่อนเลย
 แล้วจะง่าย 😊

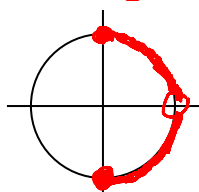
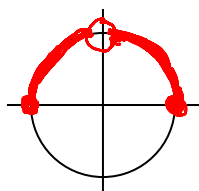
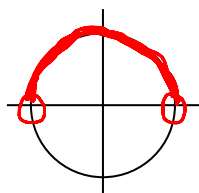
<p>→ 23) $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B$ เกิดจากสมการที่ 19)+20)</p> <p>→ 24) $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B$ เกิดจากสมการที่ 19)-20)</p> <p>→ 25) $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B$ เกิดจากสมการที่ 21)+22)</p> <p>→ 26) $\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A \sin B$ เกิดจากสมการที่ 22)-21)</p>	<p>27) $\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ เกิดจากสมการที่ 23) ตัวแปร A แทนด้วย (A+B)/2 ตัวแปร B แทนด้วย (A-B)/2</p> <p>28) $\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$ เกิดจากสมการที่ 24) ตัวแปร A แทนด้วย (A+B)/2 ตัวแปร B แทนด้วย (A-B)/2</p> <p>29) $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ เกิดจากสมการที่ 25) ตัวแปร A แทนด้วย (A+B)/2 ตัวแปร B แทนด้วย (A-B)/2</p> <p>30) $\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$ เกิดจากสมการที่ 26) ตัวแปร A แทนด้วย (A+B)/2 ตัวแปร B แทนด้วย (A-B)/2</p>
---	--

|| รวบรวม

Note $\sin^2 \theta = (\sin \theta)^2$

ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณ

ฟังก์ชันผกผัน	โดเมน	เรนจ์ (ต้องจำให้ได้นะ!!!)
$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 
$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$ 
$y = \arctan x$	$(-\infty, \infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 

ฟังก์ชันผกผัน	โดเมน	เรนจ์ (ต้องจำให้ได้นะ!!!)
$y = \operatorname{arccosec} x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ 
$y = \operatorname{arcsec} x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ 
$y = \operatorname{arccot} x$	R	$(0, \pi)$ 

ความหมายสำคัญ

$y = \operatorname{arcsin} x$ แปลว่า $\sin y = x$ โดยที่ $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$y = \operatorname{arccos} x$ แปลว่า $\cos y = x$ โดยที่ $y \in [0, \pi]$

$y = \operatorname{arctan} x$ แปลว่า $\tan y = x$ โดยที่ $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$y = \operatorname{arccosec} x$ แปลว่า $\operatorname{cosec} y = x$ โดยที่ $y \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$

$y = \operatorname{arcsec} x$ แปลว่า $\sec y = x$ โดยที่ $y \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$

$y = \operatorname{arccot} x$ แปลว่า $\cot y = x$ โดยที่ $y \in (0, \pi)$

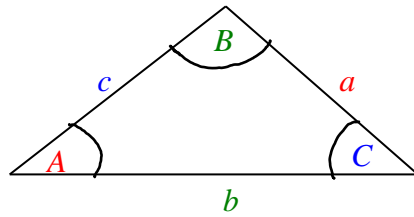
Note

$\operatorname{arcsin} x = \sin^{-1} x$, $\operatorname{arccos} x = \cos^{-1} x$, $\operatorname{arctan} x = \tan^{-1} x$

$\operatorname{arccosec} x = \operatorname{cosec}^{-1} x$, $\operatorname{arcsec} x = \sec^{-1} x$, $\operatorname{arccot} x = \cot^{-1} x$

กฎของไซน์ และ โคไซน์

ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ



กฎของไซน์

จะได้ว่า
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

กฎของโคไซน์

จะได้ว่า
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$